

Mete Namazov

KOMBİNATORİKA

Güclü başlanğıc

**Orta məktəbdə riyaziyyatı əla öyrənmək istəyənlər,
riyaziyyat və informatika olimpiadaçıları və
məktəb riyaziyyat dərnekələrinin üzvləri üçün**

Bakı - 2024

Rəyçi: Ələddin Məmmədli

Redaktorlar: Şəfəq Yaqubova, Rəqsanə İsmayılova

Korrektor: Rasim Süleymanov

Kitabla bağlı qeyd, təklif, irad və suallarınızı

mete.namazov22@gmail.com

ünvanına yollamağınızı xahiş edirik.

Kitab kombinatorikanın orta məktəbdə öyrədilən permutasiya və kombinezon bölümlərini daha ətraflı və çeşidli məsələ həlləri ilə verməklə kifayətlənmişdir. Həndəsi fiqurlar üzərində kombinatorik saymalardan ayrıca bölüm olaraq bəhs edilir. Bundan başqa, məktəb proqramına faydalı əlavə ola biləcək, eyni zamanda riyaziyyat və informatika olimpiadaçıları üçün çox vacib olan "Göyərçin yuvası prinsipi", "Daxiletmə-xaricetmə prinsipi", "Ədədlərin parçalanması", "Çoxluqların parçalanması", "Sürjekriv funksiya sayı", "Paylaşdırma" bölümləri mövzu izahı və maraqlı məsələ həlləri ilə kitabda yer alıb..

***Kitab Bilik Tədris Mərkəzinin
dəstəyi ilə nəşr olunub***



ISBN 978-9952-39-272-2

© Mete Namazov. 2024

MÜNDƏRİCAT

Ön söz. Ələddin Məmmədli	8
Giriş əvəzinə. Mən niyə ümidləri doğrultmurdum?	9
Toy maşınlarını necə düzək?	11
Bölüm 1: Kombinatorika nəyi öyrənir?	13
1.1. Sayma həmişə asan deyil	14
1.2. Saymanın çox çətin anları: kombinatorika köməyimizə gəlir	16
1.3. Nədir kombinatorika?	18
1.4. Sayma əsas nitq hissəsi kimi	20
1.5. Kombinatorika hansı saymaları öyrədir?	21
Bölüm 2: Saymanın təməl prinsipləri	23
2.1. Toplama və vurma prinsipi ilə sayma	24
2.2. Cəmi hamısından birini seçirik, yoxsa hərəsindən birini?	27
2.3. "Və ya", "və" bağlayıcılarına bir daha diqqət edək	29
2.4. Daha çox qrupdan seçdikdə vurma prinsipi	31
2.5. Eyni qrupun fərqli tərkiblərindən seçmək	32
Özün həll et	33
Bölüm 3: Saymanın təməl prinsiplərinin tətbiqi: Yol sayını tapmaq	35
3.1. Fərqli yol sayını tapmaq	36
3.2. Gəldiyiniz yollarla qayıtmayın	37
3.3. "Gəldiyimiz yollarla" deyil, "gəldiyimiz yolla" qayıtmaq olmazsa... ..	38
3.4. Alternativ yollar olduqda	41
Özün həll et	45
Bölüm 4: Saymanın təməl prinsiplərinin tətbiqi: Ədəd tərtibi	47
4.1. Ədəd tərtibi nədir və öncədən nəyi bilməliyik?	48
4.2. Verilmiş rəqəmlərlə ədədlər düzəltmək	50
4.3. Tək və cüt ədəd tələbi	52
4.4. Ədəd tərtibində çox vacib məqam: 0 rəqəmi varsa... ..	54
4.5. Cüt ədəd tələbində 0 rəqəmi varsa... ..	55

4.6. Şərtlər var: ədədlər 500-dən kiçik olsun, yaxud sonu 1 rəqəmi...	58
4.7. Ədəd tərtibində qarışıq hallar	62
4.8. Rəqəmlərdən şifrə düzəltmək	65
Özün həll et.....	66
Bölüm 5: Permutasiya	67
5.1. Permutasiya nədir?.....	68
5.2. Permutasiyanı tapmaq	70
5.3. Permutasiyaya daha bir tərif	73
5.4. Faktorialı yaxşı bilməliyik.....	74
5.5. Permutasiyaya aid bunları əzbərdən bilməli	75
5.6. Permutasiyalı ifadələr və tənliklər.....	76
Özün həll et.....	77
5.7. Təkrarlı permutasiya	79
5.8. Təkrarlı permutasiyaya aid qarışıq çalışmalar	81
5.9. “Ən qısa yolla məsələləri”nin təkrarlı permutasiya ilə həlli	85
5.10. “Ən qısa yolla məsələləri”nin həlli üçün alternativ üsul.....	87
5.11. Dairəvi masada permutasiya	91
5.12. Bir dəfə və ya istədiyin qədər istifadə etməklə permutasiyalar	92
Özün həll et.....	93
5.13. Yan-yana (qrup halında) olmaqla permutasiya	95
5.14. Yan-yana olmama durumları	98
5.15. Yeri sabit qalanlar olduqda permutasiya.....	99
5.16. Qrupun yeri sabitdir	101
Özün həll et.....	103
Bölüm 6: Kombinezon	105
6.1. Kombinezon nədir?.....	106
6.2. Permutasiya və kombinezonun fərqlərini məsələ üzərindən görmək.....	108
6.3. Kombinezonun xassələri.....	110
6.4. Kombinezonun xassələri-2.....	111

6.5. Kombinezonun xassələri-3.....	113
6.6. Kombinezon hesablamının alternativ yolu	115
6.7. Kombinezonlu ifadələr və tənliklər	116
Özün həll et	119
6.8. Kombinezonla həll edə biləcəyimiz seçmə məsələləri	121
6.9. Həm ondan, həm bundan seçim edərkən kombinezon	124
6.10. Eyni qrupdan seçmə davam edərkən kombinezon	125
6.11. Seçdiyindən seçərkən	126
Özün həll et	127
6.12. Toplamağa ehtiyac olan seçmələr	129
6.13. Ən az və ən çox şərti olan kombinezon məsələləri	131
Özün həll et	133
6.14. Bəlli elementlərin olub-olmaması şərt ilə seçmə.....	134
6.15. Fərqli qruplardan seçmədə şərt var.....	139
6.16. Fərqli qruplara seçmədə şərt var	141
Özün həll et	143
Bölüm 7: Kombinezon və permutasiya bir yerdə.....	145
7.1. Seçim və sıralama birlikdə	146
7.2. Heç biri yan-yan olmasın	147
7.3. “Ən sağda və ən solda” şərti var.....	148
Özün həll et	149
Bölüm 8: Həndəsi fiqurlarda kombinatorika.....	151
8.1. Düz xətlərin kəsişməsindən alınan nöqtə sayı	152
8.2. Çevrələrin kəsişməsindən alınan nöqtə sayı.....	157
8.3. Üçbucaqların kəsişməsindən alınan nöqtə sayı	159
8.4. Nöqtələri birləşdirən düz xətlərin sayı.....	160
8.5. Neçə üçbucaq çəkmək olar?	165
8.6. Neçə üçbucaq var?	171
8.7. Nöqtələri birləşdirməklə neçə dördbucaqlı yaranır?	174
8.8. Neçə dördbucaqlı var?	177

Özün həll et.....	179
Bölüm 9: Qruplara ayırma	181
9.1. Adsız və adlı qruplara ayırmanın fərqi.....	182
9.2. Adsız qruplara ayırmada eyni saylı qrup tipləri çoxdursa.....	184
9.3. Qruplara ayırmada qarışıq hallar	185
Özün həll et.....	187
Bölüm 10: Göyərçin yuvası prinsipi	189
10.1. Göyərçin yuvası prinsipi.....	190
10.2. Göyərçin yuvası prinsipi bizə nə zaman kömək edir?.....	192
10.3. “Ən pis hal”ı təsəvvür edərək sayma.....	193
10.4. Minimum paylaşım sayı	195
Özün həll et.....	196
Bölüm 11: Daxiletmə-xaricetmə prinsipi	197
11.1. Artıq saymamağın xüsusi üsulu: daxiletmə-xaricetmə prinsipi.....	198
11.2. Üç çoxluğun birləşməsində daxiletmə və xaricetmə	200
11.3. n çoxluğun birləşməsində daxiletmə və xaricetmə	203
Özün həll et.....	205
Bölüm 12: Ədədin parçalanması	207
12.1. Ədədin parçalanması nədir?.....	208
12.2. Bəlli sayda parçalanma	209
12.3. Ədədin parçalanması ilə məsələ həlli.....	210
12.4. Ədədin parçalanmasının düsturu varmı?	211
Özün həll et.....	212
Bölüm 13: Çoxluqların parçalanması	213
13.1. Çoxluqların parçalanması nədir?	214
13.2. Bell üçbucağı.....	216
13.3. Stirlinqin ikinci tip ədədləri və onların Bell ədədləri ilə bağlılığı.....	218
Özün həll et.....	220
Bölüm 14: Sürjektiv funksiya sayı	221

14.1. Sürjektiv funksiya nədir?	222
14.2. Sürjektiv funksiya sayı.....	224
Özün həll et.....	226
Bölüm 15: Paylaşdırma	227
15.1. Kombinatorik saymada paylaşdırma	228
15.2. Eyni şeylərin fərqli qutulara paylaşdırılması.....	230
15.3. Fərqli şeylərin fərqli qutulara yerləşdirilməsi	235
15.3. Fərqli şeylərin eyni qutulara paylaşdırılması	241
15.4. Eyni şeylərin eyni qutulara paylaşdırılması.....	245
Özün həll et.	248
Ədəbiyyat siyahısı	251

Ön söz

Mete Namazovun “Kombinatorika: güclü başlanğıc” adlı kitabı ilə tanış olanda hədsiz sevindim.

Bu kitaba çox böyük ehtiyac olduğunu əminliklə deyə bilərəm. Belə ki, yuxarı sinif şagirdləri, riyaziyyat və informatika olimpiadalarına başlayanlar üçün ana dilimizdə indiyə qədər kombinatorikaya aid heç bir kitab yox idi. Gözümüz şagirdlərimizə məsləhət görəcəyimiz bir vəsait axtarırdı.

Metenin kitabı riyaziyyatı sevən bütün şagirdlərin və hər bir riyaziyyat müəlliminin stolüstü kitabı olmağa layiqdir.

Kitab məktəblərin riyaziyyat dərnləri üçün də çox vacib vəsaitdir.

Mövzu sadə olmasa da, kitabın dili çox sadədir. Mete yaşına uyğun sadəlik və axıcılıqla izahlar verib, nəticədə yaşını aşan möhtəşəm bir vəsait hazırlayıb. Özünün dediyi kimi, bir ilini bu kitaba verib. Çox böyük zəhmətin hesabına ortaya çıxan bu kitabın işıq üzü görməsi fərəh yaradan bir hadisədir.

Kombinatorikaya aid vəsaitlərin bu vaxta qədər yazılmaması, əlbəttə ki, yaxşı hal deyil. Amma onu gözümüz önündə yetişmiş bir şagirdimizin yazması ilə qürur duya bilərik. Azdan-çoxdan köməyim və məsləhətim olubsa, buna çox sevinirəm.

Riyaziyyata böyük sevgisi ilə seçilən nadir şagirdlərdən olan Mete Namazovu bir neçə ildir tanıyıram. Yarı zarafat, yarı ciddi mənimlə birlikdə kitab yazmaq istədiyini dilə gətirmişdi. Öz işi ilə məni o qədər sevindirdi ki, onunla birlikdə çalışmağa şad olaram.

Bir müəllim üçün bundan gözəl nə ola bilər ki?!

Ələddin Məmmədli,

Azərbaycanın əməkdar riyaziyyat müəllimi

Giriş əvəzinə

Mən niyə ümidləri doğrultmurdum?

Yadıma xoşladığım bir yemək düşəndə, onu yemək üçün şəhərin o başındakı kafeyə, yaxud bibimgilə gedirdim. İstədiyim oyuna əlavə vaxt verməsi üçün Abama (bibimə), yaxud anama xahişlər edirdim.

Amma bir gün özümə sual verdim: **niyə bir şeyi öyrənmək üçün bu qədər məqsədli çalışmıram?**

Öyrənməyə qabiliyyətim də var. Hətta bəzən məsələləri onların həllini mənə öyrədən müəllimlərdən tez həll edirdim, onlar da buna sevinirdilər. Amma öyrənməyə niyə tənbellik edirdim və niyə plansız idim?

Tanınmış riyaziyyat olimpiadaçılarını yetişdirən bir müəllim hamının yanında mənə dedi: səndən indiyəcən heç kimlə əldə etmədiyim nəticələri gözləyirəm.

Məktəbə, hazırlıqlara, yarışlara - hara getsəm, mənim güclü potensialım olduğundan danışdılar. Amma niyə mən bu ümidləri doğrultmurdum? Bu sualın cavabını indi də bilmirəm, amma bu sualın cavabı yox, özü bəs etdi. Bu sualı özümə vermək məni çox dəyişdirdi.

Keçmişdə nələr qalsa da, irəliyə baxmağa başladım. Günlərlə kitabları oxuyur, məsələlər həll edir və qeydlər aparırdım. Hətta mənim kimi yeməksevər adam yeməyi də unudurdu 😊



Olimpiada nəticələrim yüksək idi. Medallarım vardı. Doğru və yanlış olduğunu deyə bilmərəm, öz üzərimdə hazırlığı son vermədən 1 illiyə olimpiadalarda iştirakımı da dayandırdım. Gücümü bu kitaba qoymağa başladım. Növbəti başlıqda bu kitabı niyə çox vacib saydığımıza aid maraqlı bir hadisəni yazmışam. Kombinatorikaya aid Azərbaycan dilində məktəblilərə və olimpiadaya başlayanlara aid heç bir kitab yox idi.

Bu kitaba 1 ilimi verdim deyə bilərəm.

Başlamaq üçün kombinatorikaya aid çox sayda kitabı, onlayn mənbəni oxudum. Harvard Universitetinin "Proqramlaşdırmaya giriş", MIT-in "Diskret riyaziyyat" dərslərini onlayn olaraq bitirdim. Akademik yazı dərsləri olan kitabları oxumağa başladım.

Bir cümləni 10 dəfə yazmaqdan, doğru, aydın və gözəl olana qədər dəyişdirməkdən yorulmadım. Vergülü, nöqtəni və digər durğu işarələrini harada qoymağı təkrar-təkrar öyrəndim. Bilmədiyim sözləri öyrəndim. Yazmağı sevsəm də, çox naşı olduğumu görüb, bacarığımı artırmaq üçün hər şeyi təkrar-təkrar yazmaq zülmünə qatlaşdım. **Təkcə bu giriş mətninin 7 versiyası olub.**

Çox əziyyət çəkdim, amma kitabı başa çatdıra bildim. Mən bu kitabı harasa təqdim etmək üçün deyil, oxunması, öyrənilməsi üçün, hətta satılması üçün yazdım. Bəzi səhvlər və qüsurlar olacağından qorxmuram, kitabın ikinci nəşrində onları da nəzərə alıb, məzmunu zənginləşdirə biləcəyəm.

Mən şeirləri də sevirəm, özüm hekayələr də yazıram, amma heç nə məni riyaziyyata sevgidən, heyranlıqdan ayıra bilmir. Ümumiyyətlə, riyaziyyat və proqramlaşdırmanın məni gözəl şeirlər qədər duyğulandırıdığını bu kitab üzərində çalışarkən bir daha hiss etdim.

Toy maşınlarını necə düzək?

Bu kitabı yazmaq ideyasının necə yaranması haqqında

Bir dəfə sinif yoldaşım ilə yolu keçərkən karvan şəklində düzülmüş toy maşınlarının siqnallar verərək hərəkət etdiyini gördük. Hamı dayanıb bu gözəl mənzərəyə tamaşa edirdi. Maşınları saydım, bəy-gəlin maşını öndə olmaqla, gözəl bəzədilmiş 14 maşın vardı.

“14 fərqli maşını toy karvanında 87 milyard 178 milyon 291 min 200 fərqli şəkildə düzmək olar”

- Mən də toyumda belə olmasını istəyərdim, hələ bir az da çox olsun maşınlar, - dedim.

İkimiz də güldük.

- Amma mən maşınları rənginə görə düzərdim. Gəlin maşını ayrı rəngdə, sonra o biri rənglər gəlir, - dostum dedi.
- Mən önə CİP-ləri qoyardım, sonra ölçülərinə görə, böyükdən-kiciyə.

Yanımızda bir yaşlı kişi də dayanmışdı, o da söhbətimizə qoşuldu.

- Markalarına görə düzərsiniz.

Sonra yolu keçdik və kefimiz yaxşı halda irəliləyərkən dostum dedi:

- Yoxlamaq lazımdır, necə gözəl görünər, bəlkə də 14 maşını 140 fərqli cür düzmək olar.
- Səncə, 14 fərqli maşını bir karvanda neçə fərqli şəkildə düzmək olar?
- 140-dan az olmaz.

Telefonumu çıxarıb kalkulyatorda hesablama apardım:

- Toyu başa çatdırma bilməzsən, 14 fərqli maşını bir karvanda 87 178 291 200 fərqli şəkildə düzmək olar. Təbii ki, rənglərə görə bir ayrı, markaya görə bir ayrı hesab lazımdır, o qədər olmasa da, çox az olmaz.

Dostum dedi:

- Sən olimpiadaçısan deyə, arada nəyisə şişirdib bizə kələk gəlırsən.

Yenə güldük... Həmin gün mən bu kitabı yazmağa qərar verdim. Kombinatorikanı necə öyrəndim? Hansı bilik və qaydaları öyrənərək, hansı çalışmaları öyrəndim? Bu, bir müəllim kitabı deyil, amma hiss edirəm ki, öyrənmək üçün çox faydalı ola bilər. Buna ehtiyac gördüm, məktəbdə riyaziyyatı yaxşı oxuyan, beş alan dostumun kombinatorik saymaya inamsız baxışından sonra buna bir daha əmin oldum. Heç gizli deyil ki, məktəblərdə riyaziyyatın öyrədilməsində ən çox çətinlik bu bölümlə bağlıdır. Riyaziyyat və informatika olimpiadasına başlayanların ən ağırlı yeri kombinatorika olur.

Məni bu kitabı yazmağa cəsarətləndirən hər kəsə, o cümlədən məktəbdən kənarda hazırlıq keçdiyim riyaziyyat və informatika olimpiadası müəllimlərimə təşəkkür edirəm.

Mənə böyük dəstək olan sevimli məktəbim – Bakı şəhəri Nəmiq Fərəcadə adına 100 saylı məktəbdəki müəllimlərimə, ayrıca direktor müavini Arzu müəllimə Qubadovaya minnətdarlıq edirəm.

Mənə uğurlar diləyin, bu kitabla kombinatorikanı öyrənməyə başlayanlara da!

Bölüm 1

Kombinatorika nəyi öyrənir?

*Çətin saymaların
riyaziyyatı*

1.1. Sayma həmişə asan deyil

7-yə bölünən ədədləri sayaq

Sadə bir çalışmaya baxaq.

Sual 1.1. 1-dən 100-ə qədər ədədlər arasında neçə 7-yə bölünən ədəd var?

Həlli. Aydındır ki, bu ədədləri 7-dən başlayaraq ritmik sayma ilə yaza bilərik.

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98

Saysaq, 14 belə ədəd olduğunu tapırıq.

Cavab: 14

Amma çalışma daha mürəkkəb olarsa, bu cür sayma bizə asan olarmı? Başqa bir suala baxaq.

Sual 1.2. 232-dən 3985-ə qədər ədədlər arasında neçə 7-yə bölünən ədəd var?

Həlli. Burada da, yuxarıda olduğu kimi, şərti ödəyən ədədləri yazıb onları əşyaları saydığımız kimi saymaq asan olmayacaq. Odur ki, bir qayda axtarışına çıxırıq.

Bunun üçün biz verilmiş aralığa düşən 7-yə bölünən ədədlərdən bir ədəd ardıcılığı düzəldib, oradakı hədlərin sayını tapırıq.

Bu aralıqda 7-yə bölünən ilk ədəd 238, sonuncu ədəd 3985 olacaq. Ümid edirəm bu ədədləri tapmağın yolunu hamı bilir. Bundan sonra biz 238, 245, ... 3983 ardıcılığındakı hədlərin sayını aşağıdakı düstur ilə tapırıq.

$$T = \frac{\text{son hədd} - \text{ilk hədd}}{\text{fərq}} + 1 = \frac{3983 - 238}{7} + 1 = 535 + 1 = 536$$

Cavab: 536

Mən bu saymanı daha asan yolla və tez edə bilirəm. Həmin üsula da baxaq.